Zestaw wzorów matematycznych został przygotowany dla potrzeb egzaminu maturalnego z matematyki obowiązującej od roku 2010. Zawiera wzory przydatne do rozwiązania zadań z wszystkich działów matematyki, dlatego może służyć zdającym nie tylko podczas egzaminu, ale i w czasie przygotowań do matury.
Zestaw ten został opracowany w Centralnej Komisji Egzaminacyjnej we współpracy z pracownikami wyższych uczelni oraz w konsultacji z ekspertami z okręgowych komisji egzaminacyjnych.

Mamy nadzieję, że zestaw, który przygotowaliśmy maturzystom, spełni swoje zadanie i przyczyni się do egzaminacyjnych sukcesów.

Publikacja współfinansowana przez UE w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Publikacja jest dystrybuowana bezpłatnie.

Spis treści

1. Wartość bezwzględna liczby

Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej x definiujemy wzorem:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Liczba $|x|$ jest to odległość na osi liczbowej punktu x od punktu 0. W szczególności:

$$|x| \geq 0 \qquad\qquad |-x| = |x|$$

Dla dowolnych liczb x, y mamy:

$$|x+y| \leq |x| + |y| \qquad\qquad |x-y| \leq |x| + |y| \qquad\qquad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

Ponadto, jeśli $y \neq 0$, to $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

Dla dowolnych liczb a oraz $r \geq 0$ mamy warunki równoważne:

$$|x-a| \leq r \quad \Leftrightarrow \quad a - r \leq x \leq a + r$$

$$|x-a| \geq r \quad \Leftrightarrow \quad x \leq a - r \quad \text{lub} \quad x \geq a + r$$

2. Potęgi i pierwiastki

Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby a definiujemy jej n–tą potęgę:

$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

Pierwiastkiem arytmetycznym $\sqrt[n]{a}$ stopnia n z liczby $a \geq 0$ nazywamy liczbę $b \geq 0$ taką, że $b^n = a$.

W szczególności, dla dowolnej liczby a zachodzi równość: $\sqrt{a^2} = |a|$.

Jeżeli $a < 0$ oraz liczba n jest nieparzysta, to $\sqrt[n]{a}$ oznacza liczbę $b < 0$ taką, że $b^n = a$.
Pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

— * —

Niech m, n będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Definiujemy:

– dla $a \neq 0$: $\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad$ oraz $\quad a^0 = 1$

– dla $a \geq 0$: $\quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

– dla $a > 0$: $\quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

Niech r, s będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to zachodzą równości:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad\qquad \left(a^r\right)^s = a^{r \cdot s} \qquad\qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$\left(a \cdot b\right)^r = a^r \cdot b^r \qquad\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

Jeżeli wykładniki r, s są liczbami całkowitymi, to powyższe wzory obowiązują dla wszystkich liczb $a \neq 0$ i $b \neq 0$.

3. LOGARYTMY

Niech $a>0$ i $a\neq 1$. Logarytmem $\log_a c$ liczby $c>0$ przy podstawie *a* nazywamy wykładnik *b* potęgi, do której należy podnieść podstawę *a*, aby otrzymać liczbę *c*:

$$\log_a c = b \Leftrightarrow a^b = c$$

Równoważnie:

$$a^{\log_a c} = c$$

Dla dowolnych liczb $x>0$, $y>0$ oraz r zachodzą wzory:

$$\log_a(x\cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a x^r = r\cdot\log_a x \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Wzór na zamianę podstawy logarytmu:
jeżeli $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$ oraz $c>0$, to

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

$\log x$ oraz $\lg x$ oznacza $\log_{10} x$.

4. SILNIA. WSPÓŁCZYNNIK DWUMIANOWY

Silnią liczby całkowitej dodatniej *n* nazywamy iloczyn kolejnych liczb całkowitych od 1 do *n* włącznie:

$$n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$$

Ponadto przyjmujemy umowę, że $0! = 1$.
Dla dowolnej liczby całkowitej $n\geq 0$ zachodzi związek:

$$(n+1)! = n!\cdot(n+1)$$

—— * ——

Dla liczb całkowitych *n*, *k* spełniających warunki $0\leq k\leq n$ definiujemy współczynnik dwumianowy $\binom{n}{k}$ (symbol Newtona):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Zachodzą równości:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1$$

5. WZÓR DWUMIANOWY NEWTONA

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej *n* oraz dla dowolnych liczb *a*, *b* mamy:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

6. Wzory skróconego mnożenia

Dla dowolnych liczb a, b:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dowolnych liczb a, b zachodzi wzór:

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + a^{n-k}b^{k-1} + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

W szczególności:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \qquad a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right) \qquad a^3 - 1 = (a-1)\left(a^2 + a + 1\right)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) \qquad a^3 + 1 = (a+1)\left(a^2 - a + 1\right)$$

$$a^n - 1 = (a-1)\left(1 + a + \ldots + a^{n-1}\right)$$

7. Ciągi

- <u>Ciąg arytmetyczny</u>

Wzór na n–ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Wzór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego zachodzi związek:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{dla} \quad n \ge 2$$

- <u>Ciąg geometryczny</u>

Wzór na n–ty wyraz ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{dla} \quad n \ge 2$$

Wzór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ początkowych n wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = \begin{cases} a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q} & \text{dla} \quad q \ne 1 \\ n \cdot a_1 & \text{dla} \quad q = 1 \end{cases}$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu geometrycznego zachodzi związek:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \quad \text{dla} \quad n \ge 2$$

- <u>Procent składany</u>

Jeżeli kapitał początkowy K złożymy na n lat w banku, w którym oprocentowanie lokat wynosi $p\%$ w skali rocznej, to kapitał końcowy K_n wyraża się wzorem:

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

8. Funkcja kwadratowa

Postać ogólna funkcji kwadratowej: $f(x)=ax^2+bx+c$, $a \neq 0$, $x \in R$.
Wzór każdej funkcji kwadratowej można doprowadzić do postaci kanonicznej:

$$f(x)=a(x-p)^2+q, \quad \text{gdzie } p=-\frac{b}{2a},\ q=-\frac{\Delta}{4a},\ \Delta=b^2-4ac$$

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku w punkcie o współrzędnych (p,q).
Ramiona paraboli skierowane są do góry, gdy $a>0$, do dołu, gdy $a<0$.

Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x)=ax^2+bx+c$ (liczba pierwiastków trójmianu kwadratowego, liczba rzeczywistych rozwiązań równania $ax^2+bx+c=0$), zależy od wyróżnika $\Delta=b^2-4ac$:

- jeżeli $\Delta<0$, to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych (trójmian kwadratowy nie ma pierwiastków rzeczywistych, równanie kwadratowe nie ma rozwiązań rzeczywistych),
- jeżeli $\Delta=0$, to funkcja kwadratowa ma dokładnie jedno miejsce zerowe (trójmian kwadratowy ma jeden pierwiastek podwójny, równanie kwadratowe ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste): $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$
- jeżeli $\Delta>0$, to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe (trójmian kwadratowy ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania rzeczywiste):

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Jeśli $\Delta \geq 0$, to wzór funkcji kwadratowej można doprowadzić do postaci iloczynowej:

$$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$$

Wzory Viéte'a
Jeżeli $\Delta \geq 0$ to

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$$

9. Geometria analityczna

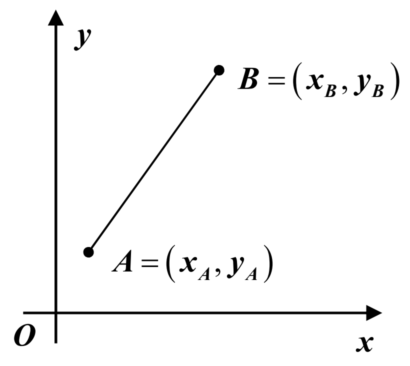
- Odcinek

Długość odcinka o końcach w punktach $A=(x_A, y_A)$, $B=(x_B, y_B)$ dana jest wzorem:

$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Współrzędne środka odcinka AB:

$$\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$$



- Wektory

Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB}=\left[x_B-x_A,y_B-y_A\right]$$

Jeżeli $\vec{u}=\left[u_1,u_2\right]$, $\vec{v}=\left[v_1,v_2\right]$ są wektorami, zaś a jest liczbą, to

$$\vec{u}+\vec{v}=\left[u_1+v_1,u_2+v_2\right] \qquad a\cdot\vec{u}=\left[a\cdot u_1,\, a\cdot u_2\right]$$

- Prosta

Równanie ogólne prostej:

$$Ax+By+C=0,$$

gdzie $A^2+B^2\neq 0$ (tj. współczynniki A, B nie są równocześnie równe 0).

Jeżeli $A=0$, to prosta jest równoległa do osi Ox; jeżeli $B=0$, to prosta jest równoległa do osi Oy; jeżeli $C=0$, to prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych.

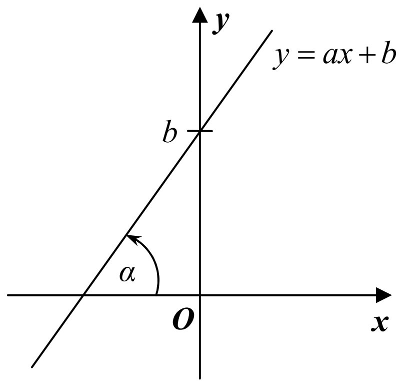
Jeżeli prosta nie jest równoległa do osi Oy, to ma ona równanie kierunkowe:

$$y=ax+b$$

Liczba a to współczynnik kierunkowy prostej:

$$a=\operatorname{tg}\alpha$$

Współczynnik b wyznacza na osi Oy punkt, w którym dana prosta ją przecina.



Równanie kierunkowe prostej o współczynniku kierunkowym a, która przechodzi przez punkt $P=\left(x_0,y_0\right)$:

$$y=a\left(x-x_0\right)+y_0$$

Równanie prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A=\left(x_A,y_A\right)$, $B=\left(x_B,y_B\right)$:

$$\left(y-y_A\right)\left(x_B-x_A\right)-\left(y_B-y_A\right)\left(x-x_A\right)=0$$

- Prosta i punkt

Odległość punktu $P=\left(x_0,y_0\right)$ od prostej o równaniu $Ax+By+C=0$ jest dana wzorem:

$$\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

- Para prostych

Dwie proste o równaniach kierunkowych

$$y=a_1x+b_1 \qquad y=a_2x+b_2$$

spełniają jeden z następujących warunków:

– są równoległe, gdy $a_1=a_2$

– są prostopadłe, gdy $a_1a_2=-1$

– tworzą kąt ostry φ i $\operatorname{tg}\varphi=\left|\dfrac{a_1-a_2}{1+a_1a_2}\right|$

Dwie proste o równaniach ogólnych:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad\qquad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

– są równoległe, gdy $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$

– są prostopadłe, gdy $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

– tworzą kąt ostry φ i $\mathrm{tg}\varphi = \left|\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}\right|$

- Trójkąt

Pole trójkąta ABC o wierzchołkach $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$, jest dane wzorem:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)\right|$$

Środek ciężkości trójkąta ABC, czyli punkt przecięcia jego środkowych, ma współrzędne:

$$\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

- Przekształcenia geometryczne

– przesunięcie o wektor $\vec{u} = [a, b]$ przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (x + a, y + b)$

– symetria względem osi Ox przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (x, -y)$

– symetria względem osi Oy przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (-x, y)$

– symetria względem punktu (a, b) przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (2a - x, 2b - y)$

– jednokładność o środku w punkcie $(0, 0)$ i skali $s \neq 0$ przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (sx, sy)$

- Równanie okręgu

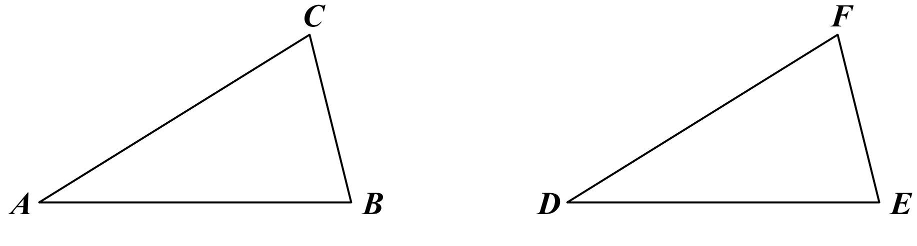
Równanie okręgu o środku w punkcie $S = (a, b)$ i promieniu $r > 0$:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

lub $\quad x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \quad$ gdy $r^2 = a^2 + b^2 - c > 0$

10. PLANIMETRIA

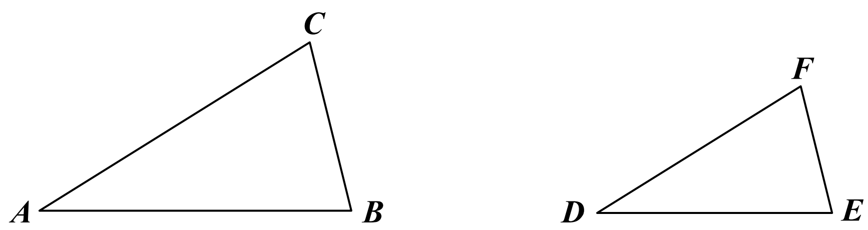
- Cechy przystawania trójkątów



To, że dwa trójkąty ABC i DEF są przystające ($\Delta ABC \equiv \Delta DEF$), możemy stwierdzić na podstawie każdej z następujących **cech przystawania trójkątów**:

- cecha przystawania „bok – bok – bok”:
  odpowiadające sobie boki obu trójkątów mają te same długości: $|AB| = |DE|$, $|AC| = |DF|$, $|BC| = |EF|$
- cecha przystawania „bok – kąt – bok”:
  dwa boki jednego trójkąta są równe odpowiadającym im bokom drugiego trójkąta oraz kąt zawarty między tymi bokami jednego trójkąta ma taką samą miarę jak odpowiadający mu kąt drugiego trójkąta, np. $|AB| = |DE|$, $|AC| = |DF|$, $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$
- cecha przystawania „kąt – bok – kąt”:
  jeden bok jednego trójkąta ma tę samą długość, co odpowiadający mu bok drugiego trójkąta oraz miary odpowiadających sobie kątów obu trójkątów, przyległych do boku, są równe, np. $|AB| = |DE|$, $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$, $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEF|$

- Cechy podobieństwa trójkątów



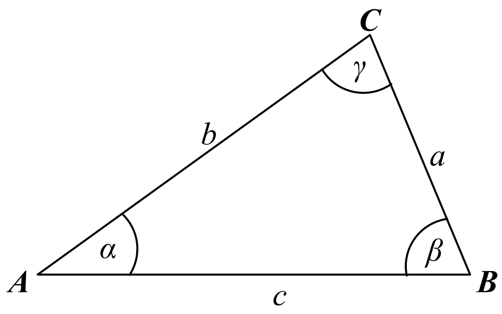
To, że dwa trójkąty ABC i DEF są podobne ($\Delta ABC \sim \Delta DEF$), możemy stwierdzić na podstawie każdej z następujących **cech podobieństwa trójkątów**:

- cecha podobieństwa „bok – bok – bok”:
  długości boków jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich długości boków drugiego trójkąta, np. $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|}$

- cecha podobieństwa „bok – kąt – bok”:
  długości dwóch boków jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich długości dwóch boków drugiego trójkąta i kąty między tymi parami boków są przystające, np. $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|}$, $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$

- cecha podobieństwa „kąt – kąt – kąt”:
  dwa kąty jednego trójkąta są przystające do odpowiednich dwóch kątów drugiego trójkąta (więc też i trzecie kąty obu trójkątów są przystające): $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$, $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEF|$, $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DFE|$

Przyjmujemy oznaczenia w trójkącie *ABC*:



a, b, c – długości boków, leżących odpowiednio naprzeciwko wierzchołków A, B, C

$2p = a + b + c$ – obwód trójkąta

α, β, γ – miary kątów przy wierzchołkach A, B, C

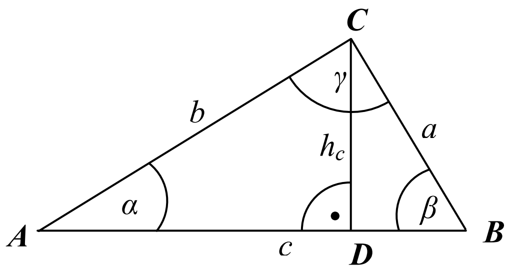
h_a, h_b, h_c – wysokości opuszczone z wierzchołków A, B, C

R, r – promienie okręgów opisanego i wpisanego

- Twierdzenie Pitagorasa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)

W trójkącie *ABC* kąt γ jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 = c^2$.

- Związki miarowe w trójkącie prostokątnym



Załóżmy, że kąt γ jest prosty. Wówczas:

$$h_c^2 = |AD| \cdot |DB|$$

$$h_c = \frac{ab}{c}$$

$$a = c \cdot \sin\alpha = c \cdot \cos\beta$$

$$a = b \cdot \mathrm{tg}\alpha = b \cdot \frac{1}{\mathrm{tg}\beta}$$

$$R = \frac{1}{2}c \qquad r = \frac{a + b - c}{2} = p - c$$

- Twierdzenie sinusów

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

- Twierdzenie cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

- Wzory na pole trójkąta

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} = 2R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R} = rp = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

- Trójkąt równoboczny

a – długość boku

h – wysokość trójkąta

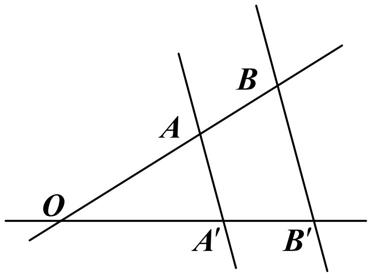
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

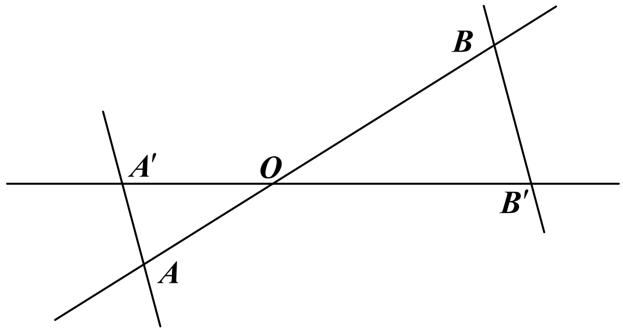
$$P_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

- Twierdzenie Talesa

Jeżeli proste równoległe AA' i BB' przecinają dwie proste, które przecinają się w punkcie O, to

$$\frac{|OA|}{|OA'|}=\frac{|OB|}{|OB'|}.$$

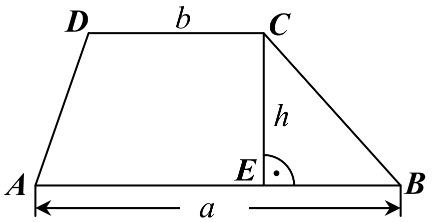




- Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa

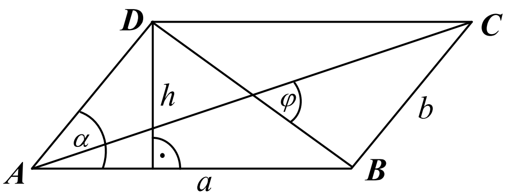
Jeżeli proste AA' i BB' przecinają dwie proste, które przecinają się w punkcie O oraz $\frac{|OA|}{|OA'|}=\frac{|OB|}{|OB'|}$, to proste AA' i BB' są równoległe.

- Czworokąty



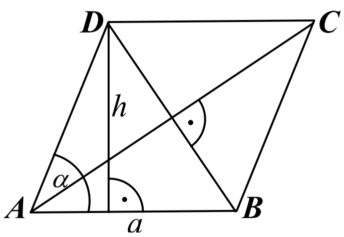
Trapez
Czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.
Wzór na pole trapezu:

$$P=\frac{a+b}{2}\cdot h$$



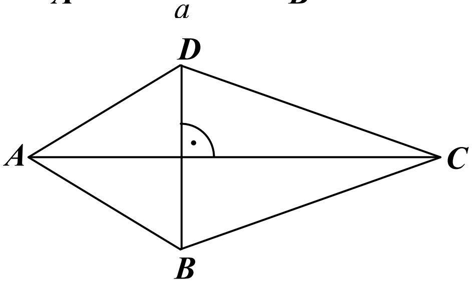
Równoległobok
Czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.
Wzory na pole równoległoboku:

$$P=ah=a\cdot b\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BD|\cdot\sin\varphi$$



Romb
Czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych jednakowej długości.
Wzory na pole rombu:

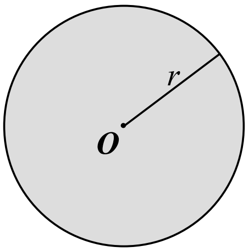
$$P=ah=a^2\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BD|$$



Deltoid
Czworokąt, który ma oś symetrii, zawierającą jedną z przekątnych.
Wzór na pole deltoidu:

$$P=\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BD|$$

- Koło



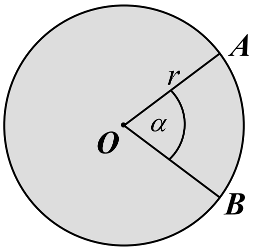
Wzór na pole koła o promieniu r:

$$P = \pi r^2$$

Obwód koła o promieniu r:

$$Ob = 2\pi r$$

- Wycinek koła

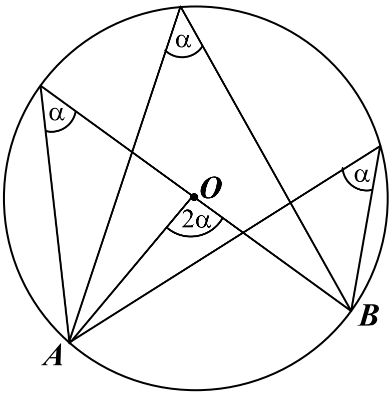


Wzór na pole wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach:

$$P = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

Długość łuku wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach: $l = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$

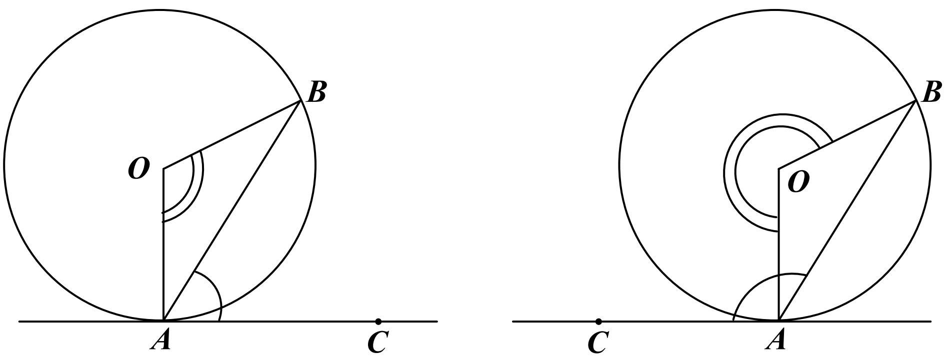
- Kąty w okręgu



Miara kąta wpisanego w okrąg jest równa połowie miary kąta środkowego, opartego na tym samym łuku.

Miary kątów wpisanych w okrąg, opartych na tym samym łuku, są równe.

- Twierdzenie o kącie między styczną i cięciwą

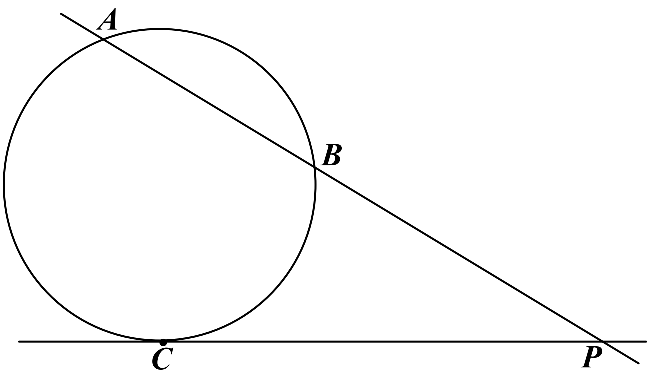


Dany jest okrąg o środku w punkcie O i jego cięciwa AB. Prosta AC jest styczna do tego okręgu w punkcie A. Wtedy $|\sphericalangle AOB| = 2 \cdot |\sphericalangle CAB|$, przy czym wybieramy ten z kątów środkowych AOB, który jest oparty na łuku znajdującym się wewnątrz kąta CAB.

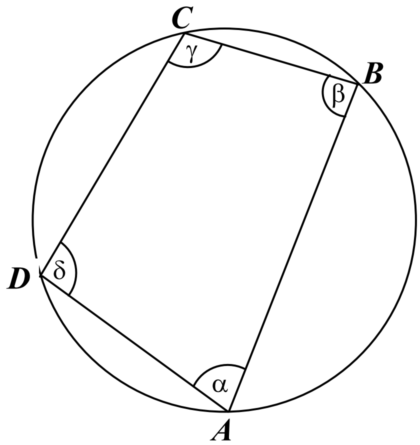
- <u>Twierdzenie o odcinkach siecznej i stycznej</u>

Dane są: prosta przecinająca okrąg w punktach A i B oraz prosta styczna do tego okręgu w punkcie C. Jeżeli proste te przecinają się w punkcie P, to

$$|PA| \cdot |PB| = |PC|^2$$



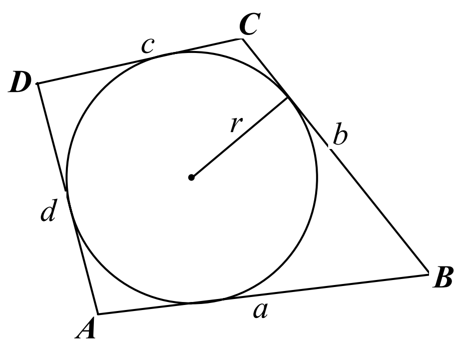
- <u>Okrąg opisany na czworokącie</u>



Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe 180°:

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$

- <u>Okrąg wpisany w czworokąt</u>

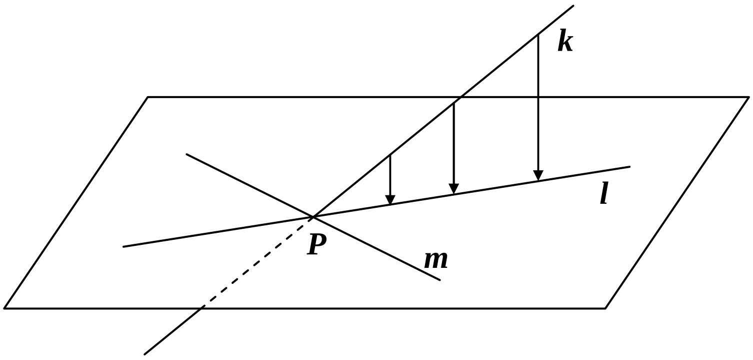


W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe:

$$a + c = b + d$$

11. STEREOMETRIA

- Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych

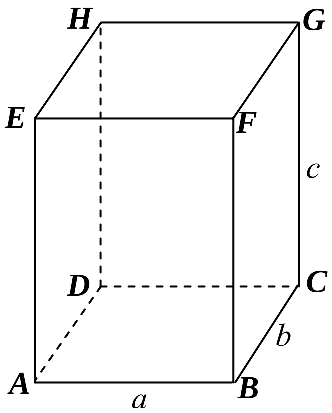


Prosta k przebija płaszczyznę w punkcie P. Prosta l jest rzutem prostokątnym prostej k na tę płaszczyznę. Prosta m leży na tej płaszczyźnie i przechodzi przez punkt P.
Wówczas prosta m jest prostopadła do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do prostej l.

- Oznaczenia

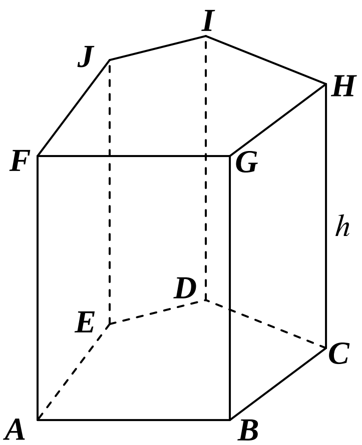
P – pole powierzchni całkowitej
P_p – pole powierzchni podstawy
P_b – pole powierzchni bocznej
V – objętość

- Prostopadłościan



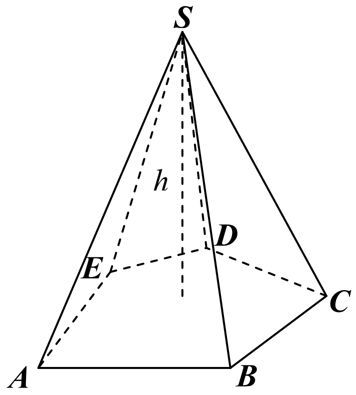
$$P = 2(ab + bc + ac)$$
$$V = abc$$
gdzie a, b, c są długościami krawędzi prostopadłościanu

- Graniastosłup prosty



$$P_b = 2p \cdot h$$
$$V = P_p \cdot h$$
gdzie $2p$ jest obwodem podstawy graniastosłupa

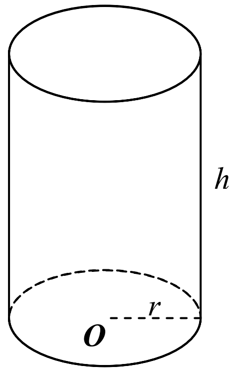
- Ostrosłup



$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$$

gdzie h jest wysokością ostrosłupa

- Walec



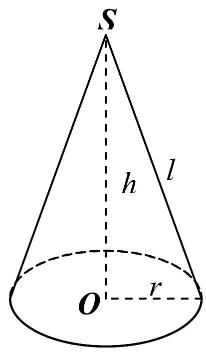
$$P_b = 2\pi rh$$

$$P = 2\pi r\left(r+h\right)$$

$$V = \pi r^2 h$$

gdzie r jest promieniem podstawy,
h wysokością walca

- Stożek



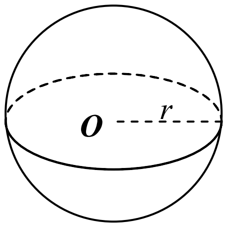
$$P_b = \pi rl$$

$$P = \pi r\left(r+l\right)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

gdzie r jest promieniem podstawy,
h wysokością, l długością tworzącej stożka

- Kula



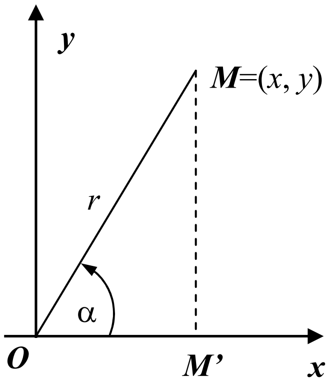
$$P = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

gdzie r jest promieniem kuli

12. TRYGONOMETRIA

- <u>Definicje funkcji trygonometrycznych</u>



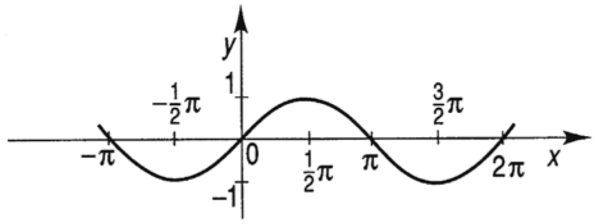
$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

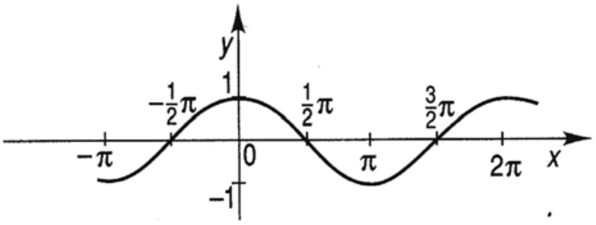
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \text{ gdy } x \neq 0$$

gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ jest promieniem wodzącym punktu M

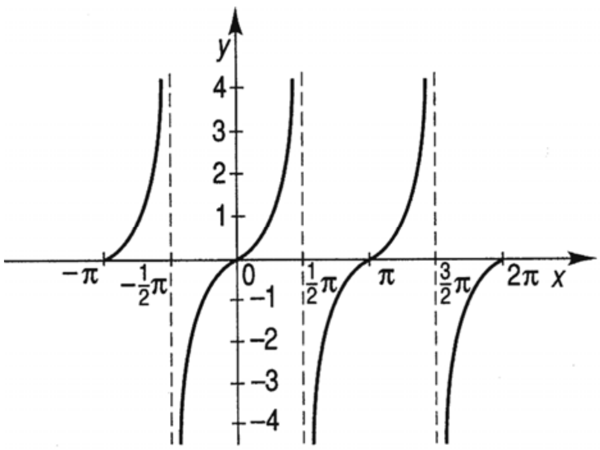
- <u>Wykresy funkcji trygonometrycznych</u>



$y = \sin x$



$y = \cos x$



$y = \mathrm{tg}\, x$

- <u>Związki między funkcjami tego samego kąta</u>

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{dla} \qquad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad k - \text{całkowite}$$

- <u>Niektóre wartości funkcji trygonometrycznych</u>

α	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

- Funkcje sumy i różnicy kątów

Dla dowolnych kątów α, β zachodzą równości:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

Ponadto mamy równości:

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta} \qquad \mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$$

które zachodzą zawsze, gdy są określone i mianownik prawej strony nie jest zerem.

- Funkcje podwojonego kąta

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

13. KOMBINATORYKA

- Wariacje z powtórzeniami

Liczba sposobów, na które z n różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się z k niekoniecznie różnych wyrazów, jest równa n^k.

- Wariacje bez powtórzeń

Liczba sposobów, na które z n różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się z k ($1\le k\le n$) różnych wyrazów, jest równa

$$n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

- Permutacje

Liczba sposobów, na które $n\ge 1$ różnych elementów można ustawić w ciąg, jest równa $n!$.

- Kombinacje

Liczba sposobów, na które spośród n różnych elementów można wybrać k ($0\le k\le n$) elementów, jest równa $\binom{n}{k}$.

14. RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

- Własności prawdopodobieństwa

$0\le P(A)\le 1$ dla każdego zdarzenia $A\subset\Omega$

$P(\Omega)=1$ Ω – zdarzenie pewne

$P(\varnothing)=0$ $\varnothing$ – zdarzenie niemożliwe (pusty podzbiór Ω)

$P(A)\le P(B)$ gdy $A\subset B\subset\Omega$

$P(A')=1-P(A)$, gdzie A' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia A

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, dla dowolnych zdarzeń $A, B\subset\Omega$

$P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$, dla dowolnych zdarzeń $A, B\subset\Omega$

- Twierdzenie: Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Niech Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych. Jeżeli wszystkie zdarzenia jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo zdarzenia $A \subset \Omega$ jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

gdzie $|A|$ oznacza liczbę elementów zbioru A, zaś $|\Omega|$ – liczbę elementów zbioru Ω.

15. Parametry danych statystycznych

- Średnia arytmetyczna

Średnia arytmetyczna n liczb $a_1, a_2, ..., a_n$ jest równa:

$$\overline{a} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

- Średnia ważona

Średnia ważona n liczb $a_1, a_2, ..., a_n$, którym przypisano odpowiednio dodatnie wagi $w_1, w_2, ..., w_n$ jest równa:

$$\frac{w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + ... + w_n \cdot a_n}{w_1 + w_2 + ... + w_n}$$

- Średnia geometryczna

Średnia geometryczna n nieujemnych liczb $a_1, a_2, ..., a_n$ jest równa:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$$

- Mediana

Medianą uporządkowanego w kolejności niemalejącej zbioru n danych liczbowych $a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le a_n$ jest:

- dla n nieparzystych: $a_{\frac{n+1}{2}}$ (środkowy wyraz ciągu)
- dla n parzystych: $\frac{1}{2}\left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}\right)$ (średnia arytmetyczna środkowych wyrazów ciągu)

- Wariancja i odchylenie standardowe

Wariancją n danych liczbowych $a_1, a_2, ..., a_n$ o średniej arytmetycznej $\overline{a}$ jest liczba:

$$\sigma^2 = \frac{(a_1 - \overline{a})^2 + (a_2 - \overline{a})^2 + ... + (a_n - \overline{a})^2}{n} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n} - (\overline{a})^2$$

Odchylenie standardowe σ jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji.

16. TABLICA WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH

α [°]	$\sin\alpha$ / $\cos\beta$	$\mathrm{tg}\alpha$	β [°]
0	**0,0000**	**0,0000**	**90**
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
6	0,1045	0,1051	84
7	0,1219	0,1228	83
8	0,1392	0,1405	82
9	0,1564	0,1584	81
10	**0,1736**	**0,1763**	**80**
11	0,1908	0,1944	79
12	0,2079	0,2126	78
13	0,2250	0,2309	77
14	0,2419	0,2493	76
15	0,2588	0,2679	75
16	0,2756	0,2867	74
17	0,2924	0,3057	73
18	0,3090	0,3249	72
19	0,3256	0,3443	71
20	**0,3420**	**0,3640**	**70**
21	0,3584	0,3839	69
22	0,3746	0,4040	68
23	0,3907	0,4245	67
24	0,4067	0,4452	66
25	0,4226	0,4663	65
26	0,4384	0,4877	64
27	0,4540	0,5095	63
28	0,4695	0,5317	62
29	0,4848	0,5543	61
30	**0,5000**	**0,5774**	**60**
31	0,5150	0,6009	59
32	0,5299	0,6249	58
33	0,5446	0,6494	57
34	0,5592	0,6745	56
35	0,5736	0,7002	55
36	0,5878	0,7265	54
37	0,6018	0,7536	53
38	0,6157	0,7813	52
39	0,6293	0,8098	51
40	**0,6428**	**0,8391**	**50**
41	0,6561	0,8693	49
42	0,6691	0,9004	48
43	0,6820	0,9325	47
44	0,6947	0,9657	46
45	0,7071	1,0000	45

α [°]	$\sin\alpha$ / $\cos\beta$	$\mathrm{tg}\alpha$	β [°]
46	0,7193	1,0355	44
47	0,7314	1,0724	43
48	0,7431	1,1106	42
49	0,7547	1,1504	41
50	**0,7660**	**1,1918**	**40**
51	0,7771	1,2349	39
52	0,7880	1,2799	38
53	0,7986	1,3270	37
54	0,8090	1,3764	36
55	0,8192	1,4281	35
56	0,8290	1,4826	34
57	0,8387	1,5399	33
58	0,8480	1,6003	32
59	0,8572	1,6643	31
60	**0,8660**	**1,7321**	**30**
61	0,8746	1,8040	29
62	0,8829	1,8807	28
63	0,8910	1,9626	27
64	0,8988	2,0503	26
65	0,9063	2,1445	25
66	0,9135	2,2460	24
67	0,9205	2,3559	23
68	0,9272	2,4751	22
69	0,9336	2,6051	21
70	**0,9397**	**2,7475**	**20**
71	0,9455	2,9042	19
72	0,9511	3,0777	18
73	0,9563	3,2709	17
74	0,9613	3,4874	16
75	0,9659	3,7321	15
76	0,9703	4,0108	14
77	0,9744	4,3315	13
78	0,9781	4,7046	12
79	0,9816	5,1446	11
80	**0,9848**	**5,6713**	**10**
81	0,9877	6,3138	9
82	0,9903	7,1154	8
83	0,9925	8,1443	7
84	0,9945	9,5144	6
85	0,9962	11,4301	5
86	0,9976	14,3007	4
87	0,9986	19,0811	3
88	0,9994	28,6363	2
89	0,9998	57,2900	1
90	**1,0000**	**–**	**0**